DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **6 décembre 2017**

Nom de famille et prénom de l'auteur : **RIPANI Luigia**

Titre de la thèse : « *Le problème de Schrödinger et ses liens avec transport optimal et inégalités fonctionnelles* »

Résumé

Au cours des 20 dernières années, la théorie du transport optimal s'est révélée être un outil efficace pour étudier le comportement asymptotique dans le cas des équations de diffusion, pour prouver des inégalités fonctionnelles et pour étendre des propriétés géométriques dans des espaces extrêmement généraux comme des espaces métriques mesurés, etc. La condition de courbure-dimension de la théorie Bakry-Emery apparaît comme la pierre angulaire de ces applications. Il suffit de penser au cas le plus simple et le plus important de la distance quadratique de Wasserstein W_2 : la contraction du flux de chaleur en W_2 caractérise les bornes inférieures uniformes pour la courbure de Ricci; l'inégalité de Talagrand du transport, comparant W_2 à l'entropie relative est impliqué et implique, par l'inégalité HWI, l'inégalité log-Sobolev; les géodésiques de McCann dans l'espace de Wasserstein P_2 (R^n, W_2) permettent de prouver des propriétés fonctionnelles importantes comme la convexité, et des inégalités fonctionnelles standards telles que l'isopérimétrie, des propriétés de concentration de mesure, l'inégalité de Prékopa-Leindler et ainsi de suite. Néanmoins, le manque de régularité des plans optimales nécessite des arguments d'analyse non lisse.

Le problème de Schrödinger est un problème de minimisation de l'entropie avec des contraintes marginales et un processus de référence fixes. À partir de la théorie des grandes déviations, lorsque le processus de référence est le mouvement Brownien, sa valeur minimale A converge vers W_2 lorsque la température est nulle. Les interpolations entropiques, solutions du problème de Schrödinger, sont caractérisées en termes de semi-groupes de Markov, ce qui implique naturellement les calculs Γ_2 et la condition de courbure-dimension. Datant des années 1930 et négligé pendant des décennies, le problème de Schrödinger connaît depuis ces dernières années une popularité croissante dans différents domaines, grâce à sa relation avec le transport optimal, à la régularité de ses solutions, et à d'autres propriétés performantes dans des calculs numériques.

Le but de ce travail est double. D'abord, nous étudions certaines analogies entre le problème de Schrödinger et le transport optimal fournissant de nouvelles preuves de la formulation duale de Kantorovich et de celle, dynamique, de Benamou-Brenier pour le coût entropique A. Puis, en tant qu'application de ces connexions, nous dérivons certaines propriétés et inégalités fonctionnelles sous des conditions de courbure-dimension. En particulier, nous prouvons la concavité de l'entropie exponentielle le long des interpolations entropiques sous la condition de courbure-dimension CD (0, n) et la régularité du coût entropique le long du flot de la chaleur. Nous donnons également différentes preuves de l'inégalité variationnelle évolutionnaire pour A et de la contraction du flux de la chaleur en A, en retrouvant comme cas limite, les résultats classiques en W_2 , sous CD (κ,∞) et CD(0,n). Enfin, nous proposons une preuve simple de la propriété de concentration gaussienne via le problème de Schrödinger comme alternative aux arguments classiques tel que l'argument de Marton basé sur le transport optimal.